Zastosowanie teorii gier w analizie mikroekonomicznej – zadania wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1

Dylemat więźnia.

W areszcie siedzi dwóch więźniów. Znajdują się w osobnych celach i nie mogą się komunikować. Policja nie jest w stanie znaleźć dowodów winy i tylko wzajemnie oskarżające się zeznania więźniów mogą doprowadzić do ich skazania i osadzenia. Jeżeli żaden z więźniów nie zgodzi się współpracować, wówczas obaj spędzą w areszcie po roku. Jeżeli obaj zgodzą się współpracować, wówczas każdy z nich spędzi w więzieniu pięć lat. Jeżeli tylko jeden okaże skruchę, a drugi będzie milczał, wówczas ten pierwszy dostanie wyrok w zawieszeniu, zaś drugi będzie musiał odsiedzieć dziesięć lat. Jak zachowa się każdy z więźniów?

Rozwiązanie

Powyższa sytuacja może zostać podsumowana w postaci tabelki.

	Więzień II współpracuje	Więzień II milczy
Więzień I współpracuje	(5, 5)	(0, 10)
Więzień I milczy	(10, 0)	(1, 1)

gdzie (*a*, *b*) oznacza, że w danej sytuacji więzień I spędzi w odosobnieniu *a* lat, zaś więzień II *b* lat.

Więźniowie nie mogą się komunikować. Więzień pierwszy zastanawia się nad swoją sytuacją: „Jeżeli więzień drugi zgodzi się współpracować, to mogę spędzić 10 lat milcząc lub 5 lat również współpracując – opłaca mi się zatem współpracować. Jeżeli drugi więzień będzie milczał, to mogę spędzić w więzieniu rok również milcząc albo wyjść od razu dzięki współpracy. W obu wypadkach opłaca mi się współpracować."

Drugi więzień myśli podobnie. Obaj podejmują współpracę mimo, że milczenie gwarantowałoby im pięciokrotnie mniejszy wyrok. W tym przypadku równowaga Nasha nie jest optymalną.

Równowaga Nasha – zestaw strategii wszystkich graczy taki, że każdemu z graczy z osobna nie opłaca się zmieniać swojej strategii.

Zadanie 2

Sadownictwo.

Rozpatrzmy grę z poprzednich zajęć. Wypłata sadownika to $6 + 2m - x$, gdzie m to minimalna inwestycja podjęta przez wszystkich sadowników, zaś x to wartość inwestycji konkretnego sadownika, która jest liczbą całkowitą i dla uproszczenia wynosi albo 1 albo 7. Załóżmy również, że sadowników jest tylko dwóch. Jakie decyzje powinni oni podjąć na gruncie teorii gier?

Rozwiązanie

Znów, wypłaty sadowników można zestawić za pomocą tabeli.

	Sadownik II inwestuje 7	Sadownik II inwestuje 1
Sadownik I inwestuje 7	($\underline{13}$, $\underline{13}$)	(1, 7)
Sadownik I inwestuje 1	(7, 1)	($\underline{7}$, $\underline{7}$)

W tabelce zakreślamy w pierwszym wierszu opcje lepszą dla II sadownika, następnie robimy to samo dla drugiego wiersza. Następnie w pierwszej kolumnie zaznaczamy opcje lepszą dla pierwszego sadownika i powtarzamy to w drugiej kolumnie. Kombinacje strategii wybrane przez obydwu sadowników są równowagami Nasha.

W tej sytuacji mamy dwie równowagi Nasha. Obaj gracze mogą równocześnie zainwestować. Obaj gracze mogą równocześnie nie inwestować. Skąd zatem wziął się problem defektu koordynacji? Czemu na zajęciach studenci wybierali nieinwestowanie? Na te pytania odpowiemy na zajęciach (można też spróbować samodzielnie się zastanowić).

Zadanie 3

Jaką odpowiedź na pytanie o optymalną strategię daje teoria gier w przypadku gry w „papier, nożyczki i kamień”? (Dla przypomnienia: papier bije kamień, kamień bije nożyczki, nożyczki biją papier.)

Rozwiązanie

W grę gra dwóch graczy, każdy z nich ma do wyboru trzy opcje. Przedstawia to następująca tabelka:

		Gracz B		
		papier	nożyczki	kamień
Gracz A	papier	(0, 0)	(-1, $\underline{1}$)	($\underline{1}$, -1)
	nożyczki	($\underline{1}$, -1)	(0, 0)	(-1, $\underline{1}$)
	kamień	(-1, $\underline{1}$)	($\underline{1}$, -1)	(0, 0)

Żadna kombinacja nie jest podkreślona przez obu graczy, równowaga Nasha zatem nie istnieje. Nie ma takiej kombinacji strategii, w którą gracze mogliby grać – zawsze przynajmniej jeden z nich jest zmotywowany, by zmienić swoją strategię.

Zadanie 4

Dwóch graczy gra w grę w której każdy z nich ma do wyboru cztery strategie (gracz pierwszy A, B, C i D, zaś gracz drugi K, L, M i N). Wypłaty obrazuje poniższa tabela. Znajdź wszystkie równowagi Nasha.

		Gracz II			
		K	L	M	N
Gracz I	A	2, 3	6, 5	7, 2	4, 1
	B	7, 8	1, 4	2, 2	4, 7
	C	3, 3	6, 2	5, 7	5, 9
	D	5, 4	3, 2	9, 4	1, 2

Rozwiązanie

		Gracz II			
		K	L	M	N
Gracz I	A	2, 3	6, 5	7, 2	4, 1
	B	7, 8	1, 4	2, 2	4, 7
	C	3, 3	6, 2	5, 7	5, 9
	D	5, 4	3, 2	9, 4	1, 2

W powyższej grze mamy zatem trzy równowagi Nasha. Są nimi następujące kombinacje strategii: (A, L), (B, K) oraz (D, M).

Zadanie 5

Gra „jastrząb” kontra „gołąb”.

W czasie wędrówki po lesie samiec napotyka wielu innych samców. Za każdym razem ma dwie możliwości zachować się jak jastrząb (agresja) lub jak gołąb (kooperacja). W zależności od tego jaką decyzję podejmie i jaką decyzje podejmie ten spotkany, obaj otrzymują pewną wypłatę, którą charakteryzuje następująca tabelka:

		Samiec B	
		jastrząb	gołąb
Samiec A	jastrząb	-5, -5	10, 0
	gołąb	0, 10	4, 4

Jak powinien zachowywać się typowy samiec idąc przez las?

Rozwiązanie

Łatwo się zorientować, że w grze tej występują dwie równowagi Nasha: (jastrząb, gołąb) i (gołąb, jastrząb). To jednak nie jest żadna wskazówka dla konkretnego samca, jak powinien się zachowywać. Nadal bowiem stoi on przed wyborem: czy grać jastrzębia czy gołębia? Gdyby wszystkie samce grały jastrzębia, to wówczas wszyscy by na tym stracili. Gdyby z kolei wszystkie samce grały gołębia, to każdemu opłacałoby się wyłamać – jego wypłata z każdego spotkania wzrosłaby o 6.

W celu rozwiązania tego problemu, podzielimy populację samców na dwie grupy. Niech p oznacza ułamek samców grających jastrzębia (lub inaczej prawdopodobieństwo, że napotkany samiec zagra jastrzębia). Wówczas $1 - p$ oznacza ułamek samców grających gołębia (lub innymi słowy prawdopodobieństwo, że napotkany samiec zagra gołębia).

Obliczmy teraz oczekiwaną wypłatę z zagrania jastrzębia. Jeśli gramy jastrzębia, wówczas z prawdopodobieństwem p otrzymamy wypłatę -5, zaś z prawdopodobieństwem $1 - p$ otrzymamy wypłatę 10. Wynika z tego, że nasza oczekiwana wypłata to $-5p + 10(1 - p) = 10 - 15p$.

Jaka natomiast jest oczekiwana wypłata gdy gramy gołębia? Z prawdopodobieństwem p otrzymamy 0, zaś z prawdopodobieństwem $1 - p$ otrzymamy 4. Nasza oczekiwana wypłata to $0p + 4(1 - p) = 4 - 4p$.

Znamy już teraz oczekiwane wypłaty z obu strategii. Gdyby oczekiwana wypłata z grania jastrzębia była wyższa niż oczekiwana wypłata z grania gołębia, wówczas liczba jastrzębi by rosła aż do zrównania się tych wartości. Gdyby oczekiwana wypłata z grania gołębia była wyższe niż oczekiwana wypłata z grania jastrzębia, wówczas liczba jastrzębi malałaby na korzyść liczby gołębi znów aż do momentu, w którym wartości te zrównają się. Wnioskujemy zatem, że w stanie równowagi oczekiwana wypłata z grania jastrzębia musi być równa oczekiwanej wypłacie z grania gołębia. Zatem:

$10 - 15p = 4 - 4p$, czyli $6 = 11p$, czyli $p = 6/11$.

Wiemy zatem, że w stanie równowago 6/11 populacji to będą jastrzębie, natomiast 5/11 (reszta) będą zachowywać się jak gołębie. Chodzące po lesie samce mogą albo podzielić się rolami zgodnie z powyższą proporcją, albo przed każdym spotkaniem losować i z prawdopodobieństwem 6/11 przyjmować rolę jastrzębia, zaś z 5/11 gołębia.

Mówimy, że ((6/11, 5/11), (6/11, 5/11)) jest *równowagą w strategiach mieszanych* powyższej gry, zaś (jastrząb, gołąb) i (gołąb, jastrząb) są *równowagami w strategiach czystych*. Strategie w których wybieramy jakąś opcję nazywamy *strategiami czystymi*, natomiast strategie w których każdej z opcji przypisujemy jakieś prawdopodobieństwo wybrania jej, nazywamy *strategiami mieszanymi*.

Uwaga! Każda z powyższych gier ma równowagę w strategiach mieszanych (jako ćwiczenie polecam znalezienie równowagi w strategiach mieszanych dla gdy w „papier, nożyczki i kamień").