Wybór w warunkach niepewności – zadania wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1

Borys ma Jach wart 50 mln rubli. Jeśli jacht wpadnie na rafę koralową, jego wartość spadnie do 8 mln rubli. Prawdopodobieństwo wypadku wynosi p = 1/3. Ile Borys maksymalnie zechce zapłacić za ubezpieczenie jachtu, jeśli jego funkcja użyteczności ma postać $U(w) = (w/2)^{0,5}$? Ile wynosi jego oczekiwana strata?

Rozwiązanie

Najpierw rozpatrzmy wariant, w którym jacht nie zostaje ubezpieczony. Jaka jest wówczas oczekiwana użyteczność Borysa? Z prawdopodobieństwem 1/3 jacht trafia na rafę, z prawdopodobieństwem 2/3 udaje mu się utrzymać swoja wartość.

$$EU(w) = \frac{1}{3} \times U(8000000) + \frac{2}{3} \times U(50000000) = \frac{1}{3} \times 2000 + \frac{2}{3} \times 5000 = 4000.$$

A więc oczekiwana użyteczność Borysa, gdy nie ubezpieczy jachtu wynosi 4000. Sprawdźmy teraz, ile musiałby wydać na ubezpieczenie, by jego użyteczność wyniosła właśnie 4000. Jeżeli Borys ubezpieczy jacht, wówczas poniesie jednorazowy wydatek niezależnie od tego czy jacht trafi na rafę czy nie i także niezależnie od wszelkich zdarzeń losowych, Borys będzie posiadał majątek w wysokości ceny jachtu pomniejszonej o składkę ubezpieczenia.

$$U(50000000 - x) = 4000$$

Gdzie x oznacza składkę ubezpieczenia. Dokonując przekształceń otrzymujemy x = 18000000. Tak więc Borys zapłaci za ubezpieczenie maksymalnie 18 mln rubli.

Ile wynosi oczekiwana strata? Strata może wystąpić z prawdopodobieństwem 1/3. Jej wysokość wyniesie 42 mln rubli. Oznacza to, że oczekiwana strata wynosi $\frac{1}{3} \times 42 = 14$ mln rubli.

Zadanie 2

Ewa boi się ryzyka. Zaproponowano jej udział w grze, w której z prawdopodobieństwem ¼ straci 720 zł, a z prawdopodobieństwem ¾ zyska 240 zł. Oblicz wartość oczekiwaną i ustal, czy Ewa zagra w tę grę.

Rozwiązanie

Wartość oczekiwana wynosi: $\frac{3}{4} \times 240 - \frac{1}{4} \times 720 = 180 - 180 = 0.$

Ewa wykazuje awersję do ryzyka, tak więc możliwość wysokiej straty, nawet przy niewielkim prawdopodobieństwie traktuje jako zbyt wysokie ryzyko.

Zadanie 3

Preferencje Agnieszki co do gry, w której wystąpi z równym prawdopodobieństwem zdarzenia „a” lub „b”, może opisać za pomocą funkcji von Neumanna-Morgensterna o postaci: $U(x) = x^{0,5}$. Ustal wysokość kwoty, która otrzymana na pewno jest dla niej tak samo dobra jak wzięcie udziału w grze, w której w przypadku zajścia zdarzenia „a” otrzyma 64 zł lub w przypadku zajścia zdarzenia „b” otrzyma 16 zł.

Rozwiązanie

Oznaczmy przez q kwotę, którą Agnieszka wyceni tak samo jak wzięcie udziału w grze. Użyteczność z tej kwoty jest taka sama jak oczekiwana użyteczność z wzięcia udziału w grze.

$$\sqrt{q} = U(q) = EU(w) = \frac{1}{2} \times U(16) + \frac{1}{2} \times U(64) = \frac{1}{2} \times 4 + \frac{1}{2} \times 8 = 6$$

$$q = 36$$

Zadanie 4

Ewa nie lubi ryzyka. Jurek proponuje jej przeprowadzenie ankiety, za które na pewno dostanie 200 zł. Leo ma dla niej pracę polegającą na napisaniu artykułu. Jeśli Ewa napisze dobry artykuł, dostanie 300 zł, jeśli kiepski – tylko 100 zł. Jeżeli prawdopodobieństwo, że Ewa napisze dobry artykuł wynosi 0,5, to którą ofertę powinna przyjąć?

Rozwiązanie

Na to zadanie można spojrzeć na kilka sposobów i każdy da taki sam wynik. Oczywiście nie rozważamy wartości oczekiwanej, ponieważ w obu przypadkach jest ona taka sama i wynosi 200 zł. Interesuje nas ryzyko. Jeżeli zmierzymy ryzyko za pomocą wariancji, to w przypadku oferty Jurka miara ta wynosi 0, zaś w przypadku Leo wynosi 10000. Tak więc Ewa powinna wybrać ofertę Jurka.

Jeżeli spojrzymy na to z punktu widzenia funkcji użyteczności – osoby z awersją do ryzyka wykazuje malejąca krańcową użyteczność – wówczas zauważymy, że zmiana z 200 zł na 300 zł stanowi mniejszy wzrost użyteczności niż z 100 zł na 200 zł, zatem oczekiwana użyteczność w przypadku wykonywania pracy zleconej przez Jurka będzie mniejsza niż w przypadku pracy zleconej przez Leo. Ewa wybiera Leo.

I wreszcie, intuicja podpowiada, że Ewa powinna wybrać ofertę Jurka. Skoro w obu przypadkach można zarobić potencjalnie 200 zł, to czy nie lepiej wybrać te opcję, w której nie ma żadnego ryzyka?

Zadanie 5

Mikołaj kupił 16 bombek na choinkę. Za podróż do domu nic nie zapłaci, bo ma bilet miesięczny. Jednak autobusy są zatłoczone, więc Mikołaj ma 50% szans na dowiezienie wszystkich bombek w całości i 50% na rozbicie wszystkich. Zastanawia się czy:

1. Od razu zabrać wszystkie bombki
2. Przewieźć bombki w dwóch turach, biorąc za każdym razem tylko 8.

Którą strategię wybierze, jeżeli jest asekurantem (ma awersję do ryzyka)?

Rozwiązanie

W obu przypadkach wartość oczekiwana liczby dowiezionych na miejsce bombek jest taka sama i wynosi 8. Użyjmy zatem miary ryzyka, jaką stanowi wariancja. W pierwszym przypadku wynosi ona 64. W drugim zaś $\sigma^2 = \frac{1}{4} \times (8-0)^2 + \frac{1}{2} \times (8-8)^2 + \frac{1}{4} \times (8-16)^2 = 32$. Drugi sposób jest zatem mniej ryzykowny. I ten sposób wybierze Mikołaj.

<u>Zadanie 6</u>

Adam ma obraz wart 300 $ i lokatę bankową w wysokości 100 $. Prawdopodobieństwo kradzieży obrazu z jego mieszkania jest równe 5%. Pieniądze w banku są całkowicie bezpieczne. Adama cechuje następująca funkcja użyteczności $U(x) = x^{0,5}$. Rozważa on ubezpieczenie obrazu w firmie ubezpieczeniowej, której funkcja użyteczności pieniądza ma postać $U(x) = x$. Firma ta dysponuje kapitałem w wysokości 10 000$. Jaką maksymalną składkę zapłaci Adam za pełne ubezpieczenie obrazu? Co najmniej jakiej kwoty zażąda firma za pełne ubezpieczenie firma ubezpieczeniowa?

Rozwiązanie

Analogicznie jak w poprzednich przypadkach, wyliczymy najpierw użyteczność oczekiwaną Adam w sytuacji, gdy nie ubezpiecza on obrazu.

$$EU(w) = \frac{1}{20} \times U(100) + \frac{19}{20} \times U(400) = 0,5 + 19 = 19,5$$

Następnie wyliczamy maksymalną stawkę ubezpieczenia, którą zgodzi się zapłacić Adam.

$$U(400 - q) = 19,5 \Rightarrow 400 - q = 380,25 \Rightarrow q = 19,75$$

Adam jest skłonny zapłacić maksymalnie 19,75 za ubezpieczenie.

Ubezpieczyciel czerpie użyteczność ze swojego kapitału na poziomie 10000. Żeby zechciał on ubezpieczyć obraz Adama stawka musi być przynajmniej taka, żeby oczekiwana użyteczność ubezpieczyciele była na poziomie właśnie 10000.

$$10000 = EU(w) = \frac{1}{20} \times (9700 + q) + \frac{19}{20} \times (10000 + q) = 9985 + q \Rightarrow q = 15$$

A więc ubezpieczyciel ustali składkę na poziomie nie mniejszym niż 15 dolarów.