Wartość pieniądza w czasie – zadania wraz z rozwiązaniami

Zadanie 1

Pewna inwestycja trwa 2 lata, a rozkład nakładów inwestycyjnych w czasie jest następujący: rok pierwszy – 31 mln zł, rok drugi – 1 mln zł. Obiekt zaczyna funkcjonować już od drugiego roku przez kolejne 3 lata przynosząc zyski po 13 mln zł rocznie.

1. Czy inwestycja jest opłacalna?
2. Jak zmieni się inwestycja, jeśli nakłady inwestycyjne będą rozłożone rok I – 1 mln zł, rok II – 31 mln zł?
3. Jak zmieni się inwestycja, jeśli nakłady inwestycyjne będą rozłożone rok I – 1 mln zł, rok II – 31 mln zł, a zyski pojawią się po całkowitym zakończeniu inwestycji przez kolejne 3 lata?

Stopa lokaty bankowej 5%, zaś stopa ryzyka 7%.

Rozwiązanie

Mamy tu do czynienia z trzema wariantami. Dla każdego z wariantów policzymy wartość bieżącą netto (*NPV* – Net Present Value). Dodatnie *NPV* będzie świadczyć o opłacalności inwestycji. Im jest ono wyższe, tym inwestycja jest bardziej opłacalna.

Aby obliczyć *NPV*, należy od bieżącej kwoty przychodów odjąć bieżącą kwotę wydatków. Zgodnie z treścią zadania, alternatywne wykorzystanie naszego kapitału to umieszczenie go na lokacie. Oprocentowanie lokaty stanowić więc będzie stopę procentową, którą będziemy wykorzystywać do dyskontowania przepływów pieniężnych w czasie. W obliczeniach należy również uwzględnić czynnik ryzyka. Zgodnie z uproszczoną formułą czynnik dyskontujący w naszym przypadku będzie wynosił $\delta = \frac{1}{1+r+p} = \frac{1}{1+0{,}05+0{,}07} \approx 0{,}89$.

Bieżącą wartość (*PV* – Present Value) przepływu pieniężnego o nominalnej wartości *K* z roku *t* wyliczamy zgodnie z formułą $PV = K\delta^t$ (przyjmujemy, że dla roku pierwszego *t* = 0, dla następnego *t* = 1 itd.).

Ponadto dla uproszczenia zakładamy, że wszystkie przepływy obarczone są ryzykiem – także wydatki. Może się nam bowiem poszczęścić i dany nakład nie będzie konieczny, wystarczą jedynie do tej pory zainwestowane środki. Gdyby ryzyko nie dotyczyło nakładów, musielibyśmy zastosować inny czynnik dyskontujący do przychodów i inny do wydatków.

Obliczmy *NPV* dla pierwszego okresu:

Wersja pierwsza		I	II	III	IV	suma
koszt	nominalny	31	1	0	0	
	PV	31	0,89	0	0	**31,89**
przychód	nominalny	0	13	13	13	
	PV	0	11,61	10,36	9,25	**31,22**

Bieżąca wartość poniesionych wydatków (31,89) przekracza zatem bieżącą wartość przychodów (31,22). *NPV* = 31,22 – 31,89 = -0,67. Oznacza to, że inwestycja nie jest opłacalna.

W podobny sposób liczymy NPV dla pozostałych dwóch podpunktów.

Wersja druga		I	II	III	IV	suma
koszt	nominalny	1	31	0	0	
	PV	1	27,68	0	0	**28,68**
przychód	nominalny	0	13	13	13	
	PV	0	11,61	10,36	9,25	**31,22**

NPV = 2,55

Wersja trzecia		I	II	III	IV	V	suma
koszt	nominalny	1	31	0	0	0	
	PV	1	27,68	0	0	0	**28,68**
przychód	nominalny	0	0	13	13	13	
	PV	0	0	10,36	9,25	8,26	**27,88**

NPV = -0,80

Jak widać, inwestycja będzie opłacalna jedynie w drugim wariancie.

<u>Zadanie 2</u>

Kowalski kupił nowe mieszanie. Pod budynkiem znajduje się garaż podziemny, w którym prawo do miejsca parkingowego kosztuje 25500 PLN. Przy rynkowej stopie dyskontowej R = 8%, Kowalski ma wybór: kupić miejsce parkingowe i płacić koszty jego utrzymania w kwocie 30 PLN albo wynająć od sąsiadki (która kupiła miejsce, ale właśnie skradziono jej w mieście samochód) za 100 zł (razem z kosztami utrzymania). Którą opcję powinien wybrać Kowalski?

Jeżeli rynkowa cena rynkowa wynajmu wynosi 200 PLN (zawiera koszty utrzymania) to ile powinna wynieść bieżąca rynkowa wartość miejsca postojowego?

Rozwiązanie

Aby odpowiedzieć na pierwsze pytanie, należy wyliczyć wartość bieżącą kosztów związanych z zakupem oraz wartość bieżącą kosztów związanych z wynajmem a następnie je porównać. Nie wiemy jak długo Kowalski będzie korzystał z miejsca parkingowego – możemy jednak założyć, że będzie to trwało na tyle długo, że dobrym przybliżeniem będzie tu nieskończony czas. Dla uproszczenia zakładamy, że płatności dokonywane są „z dołu”. Ponadto, żeby uprościć obliczenia założymy, że podstawowym okresem rozliczeniowym jest miesiąc. Miesięczna stopa procentowa wynosi $R/12 = r \approx$ 0,66%.

Ile będzie wynosiła wartość bieżąca w przypadku kupna?

$$PV = 25500 + \frac{30}{1+r} + \frac{30}{(1+r)^2} + \frac{30}{(1+r)^3} + \cdots = 25500 + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{30}{(1+r)^t} = 25500 + \frac{30}{0{,}08/12}$$
$$= 25500 + 4500 = 30000$$

Ile będzie wynosiła wartość bieżąca w przypadku czynszu?

$$PV = \frac{100}{1+r} + \frac{100}{(1+r)^2} + \frac{100}{(1+r)^3} + \cdots = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{100}{(1+r)^t} = \frac{100}{0{,}08/12} = 15000$$

Widać zatem, że bardziej opłaca się wynająć miejsce. Bieżący koszt tego rozwiązania jest o połowę niższy niż bieżący koszt zakupu miejsca.

Odpowiemy teraz na ostatnie pytanie z treści zadania. Wynajmujący otrzymuje miesięcznie 200 zł. Z tego 30 zł należy przeznaczyć na koszty utrzymania miejsca. Pozostaje 170 zł. Ta kwota stanowi przychody wynajmującego. Mechanizmy rynkowe doprowadzą do sytuacji, w której przychody zrównają się z kosztami. A więc koszty, które musi ponieść wynajmujący (bieżąca wartość rynkowa miejsca) będą równe zdyskontowanej (bieżącej) wartości przychodów.

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{170}{(1+r)^t} = \frac{170}{r} = \frac{170}{0{,}08/12} = 25500$$

Tak więc bieżąca wartość rynkowa miejsca postojowego wynosi 25500.

Uwaga! W powyższym rozwiązaniu posługiwaliśmy się formułą na sumę nieskończonego szeregu – umożliwia ona obliczenie bieżącej wartości nieskończonego w czasie ciągu przepływów. Wyraża się ona następującym wzorem:

$$\sum_{t=1}^{\infty} \frac{K}{(1+r)^t} = \frac{K}{r}$$

Gdzie *K* to przepływ pieniężny w momencie *t*, zaś *r* to stopa procentowa.

<u>Zadanie 3</u>

Masz 100 zł i wiesz, że stopa procentowa w banku wynosi 100%. Ile będziesz mieć po roku, jeżeli:

1. Kapitalizacja jest roczna
2. Kapitalizacja jest miesięczna
3. Kapitalizacja jest ciągła

Rozwiązanie

W pierwszym przypadku po prostu wyliczamy odsetki. W oczywisty sposób kapitał podwaja się, więc w banku będzie po roku 200 zł.

W drugim przypadku należy uwzględnić miesięczną kapitalizację. Po roku na koncie będzie:

$100 * \left(1 + \frac{1}{12}\right)^{12} = 261{,}30$ zł.

Natomiast w przypadku kapitalizacji ciągłej sprawa jest bardziej skomplikowana. Wiadomo, że jeśli podzielimy rok na *n* równych odcinków i po każdym będziemy dokonywać kapitalizacji, to wówczas, przy kapitale początkowym *K* i stopie procentowej *r*, po roku będziemy mieli na koncie $K\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n$. Jeżeli interesuje nas kapitalizacja ciągła, to znaczy, że musimy podzielić rok na nieskończenie wiele drobnych odcinków czasu.

Wiadomo, że $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = e^r$. Zatem dla stopy procentowej *r* = 100% = 1, po podzieleniu roku na nieskończenie wiele małych odcinków czasu będziemy mieli na koncie $Ke \approx 100 \times 2{,}7183 = 271{,}83$ zł.

<u>Zadanie 4</u>

Czy kupił(a)byś za 120 zł obligację o wartości nominalnej 200 zł i terminie wykupu 3 lata, jeśli wiesz, że jej oprocentowanie wynosi 2,5% rocznie? Stopa lokaty bankowej 5%, a stopa ryzyka 7%.

Rozwiązanie

Bieżący koszt obligacji to 120 zł. Należy policzyć bieżącą wartość przychodów i sprawdzić czy *NPV* będzie dodatnia. Rocznie obligacja daje nam 5 zł (2,5% od wartości nominalnej)

$$PV = \frac{5}{1{,}12} + \frac{5}{1{,}12^2} + \frac{205}{1{,}12^3} = 4{,}46 + 3{,}99 + 145{,}91 = 154{,}37$$

Wynika z tego, że obligację opłaca się kupić: *NPV* = 154,37 – 120 = 34,37 > 0.

<u>Zadanie 5</u>

Posiadasz portfel w skład którego wchodzą 3 obligacje o wartości nominalnej 100 zł, cenie 110 zł, terminie wykupu 2 lata, oprocentowaniu 10%, odsetki płacone co roku oraz 5 obligacji o wartości nominalnej 100, cenie 91,67, terminie wykupi 1 rok, bez odsetek. Oblicz wewnętrzną stopę zwrotu.

Rozwiązanie

Obecnie koszt zakupu opisanego portfela wynosi $3 \times 110 + 5 \times 91{,}67 = 788{,}35$. Wewnętrzna stopa zwrotu (*IRR* – Internal Rate of Return) będzie to taka stopa dyskontowania *r*, dla której wartość bieżąca przychodów z opisanego portfela obligacji będzie równa jego kosztowi zakupu, czyli 788,35 zł. Innymi słowy, jest to taka stopa procentowa, dla której wartość bieżąca netto portfela jest równa zero.

Wyliczmy zatem, ile wynoszą przychody w zależności od stopy dyskontowania *r*. W pierwszym okresie wykupione zostaje 5 obligacji o cenie nominalnej 100 zł oraz otrzymujemy 30 zł z odsetek. W drugim okresie otrzymujemy znów 30 zł z odsetek oraz wykupowane są 3 obligacje o cenie nominalnej 100 zł.

$$PV = \frac{530}{1+r} + \frac{330}{(1+r)^2}$$

Przyrównując *PV* do kosztu zakupu portfela otrzymujemy równanie kwadratowe. Dla uproszczenia oznaczmy 1 + *r* = *x*:

$$788{,}35x^2 - 530x - 330 = 0$$

Rozwiązując to równanie otrzymujemy jeden dodatni wynik: *x* = 1,0652. Zatem *IRR* = 6,52%