Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Adam Narkiewicz
Nr albumu: 244434

Optymalne sterowanie i tradycyjny rachunek wariacyjny: Dwuwymiarowe zagadnienie Newtona

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA

Praca wykonana pod kierunkiem
prof. dr hab. Tadeusza Mostowskiego
Instytut Matematyki

Wrzesień 2007

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora (autorów) pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora (autorów) pracy

Streszczenie

Praca została napisana w oparciu o artykuł "Two dimensional Newton's Problem of Minimal Resistance" autorstwa Christiny J. Silvy i Delfima F. M. Torresa. W pracy zaprezentowano wyniki, do których doszli autorzy tego artykułu, rozważając problem optymalnego kształtu dwuwymiarowego ciała poruszającego się w rzadkiej cieczy, uściślając je i wyjaśniając niejasności. Praca zawiera pełne podsumowanie dotyczące istnienia oraz liczby rozwiązań tego problemu, rozpatrywanych zarówno w klasie ekstremów słabych jak i ekstremów mocnych.

Słowa kluczowe

Zagadnienie Newtona minimalnego oporu, dwa wymiary, rachunek wariacyjny, optymalne sterowanie, warunki wystarczające, warunki konieczne, ekstremum mocne, ekstremum słabe

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

49 - Rachunek wariacyjny i optymalne sterowanie; optymalizacja
49K - Warunki konieczne i wystarczające optymalności
49K05 - Zagadnienia z jedną zmienną niezależną

Tytuł pracy w języku angielskim

Optimal Control and Calculus of Variations: two-dimensional Newton's Problem

Spis treści

Wprowadzenie

Zagadnienie minimalnego oporu jest jednym z najstarszych zagadnień optymalnego sterowania (przez niektórych uważane za najstarsze zagadnienie rachunku wariacyjnego - w zależności od założeń nakładanych na model fizyczny). Po raz pierwszy (przy mocnych założeniach) zostało ono rozwiązane przez Newtona w 1686 roku. Nie podał on co prawda sposobu, w jaki doszedł do swoich rezultatów, jednak prace późniejszych matematyków wykazały, że jego wyniki były poprawne. Od czasów Newtona uczeni wielokrotnie powracali do tego problemu, osłabiając założenia i rozwiązując je dla wielu szczególnych przypadków. Najczęściej jednak zajmowano się przypadkami w trzech i więcej wymiarach. Prawdopodobnie większość uczonych uznała, że przypadek dwuwymiarowy jest zbyt prosty i niewart zainteresowania. Przekonanie to wydaje się być jednak mylne. Jak się okazuje, problem minimalnego oporu w dwóch wymiarach, przy tych samych mocnych założeniach jest nieco bardziej złożony od problemu trójwymiarowego, zarówno pod względem istnienia rozwiązań, jak i ich liczby.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie istnienia oraz liczby rozwiązań dwuwymiarowego zagadnienia Newtona w zależności od zastosowanych metod rozwiązywania. W pierwszym rozdziale zagadnienie to zostaje precyzyjnie sformułowane na różne sposoby tak, aby bez problemu można było później zastosować do niego zarówno metody optymalnego sterowania jak i metody tradycyjnego rachunku wariacyjnego. W drugim rozdziale przytoczone zostały najważniejsze twierdzenia, niezbędne do dalszych analiz. W rozdziale trzecim zaprezentowano oraz skomentowano wyniki, do których doszli Christiana J. Silva oraz Delfim F. M. Torres w swojej pracy [3], próbując zastosować metody optymalnego sterowania do zagadnienia, w którym pochodna krzywej wyznaczającej kształt ciała może przyjmować dowolne wartości. W rozdziale czwartym podane zostało rozwiązanie podobnego zagadnienia, zakładające jednak nieujemność wzmiankowanej pochodnej. W piątym rozdziale zaprezentowano rezultaty, do których można dojść stosując tradycyjne metody rachunku wariacyjnego dla dwuwymiarowego zagadnienia Newtona.

Przy każdym twierdzeniu zawartym w pracy znajduje się odnośnik do literatury, z której zostało ono zaczerpnięte. Twierdzenia sformułowane i udowodnione przez autora pracy oznaczone zostały gwiazdką (★).

Rozdział 1

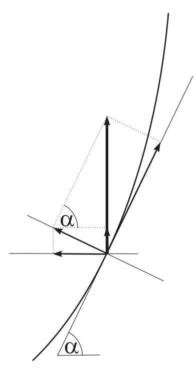
Sformułowanie problemu

W trójwymiarowym problemie Newtona zadanie polega na wyznaczenie takiego kształtu poruszającego się ciała, by ośrodek w którym się ono znajduje stanowił jak najmniejszy opór. Newton rozwiązał ten problem dodając do modelu fizycznego wiele założeń dotyczących zarówno budowy ciała, jak i struktury ośrodka [3].

Zaczniemy od wyliczenia oporu, jaki stanowi strumień cząsteczek uderzający w powierzchnię poruszającego się ciała. Jeżeli kąt pomiędzy kierunkiem ruchu a styczną do powierzchni wynosi $\pi/2 - \alpha$, wówczas pęd cząsteczki $\overrightarrow{p}$ można rozłożyć na dwie składowe - jedną równoległą do stycznej, o wartości $|\overrightarrow{p}| \sin\alpha$ i drugą prostopadłą do stycznej, o wartości $|\overrightarrow{p}| \cos\alpha$. Pierwszą z tych składowych możemy zignorować. Druga natomiast rozkłada się na składową prostopadłą do kierunku ruchu, o wartości $|\overrightarrow{p}| \sin\alpha\cos\alpha$, którą z symetryczności osiowej ciała możemy również zignorować, oraz składową o zwrocie takim samym, jaki ma pęd cząsteczki: $\overrightarrow{p}\cos^2\alpha$ (rys. 1.1). Wynika z tego, że opór jaki stanowi strumień cząsteczek uderzający w rozpatrywanym miejscu w powierzchnię ciała wynosi $M\cos^2\alpha$, gdzie M jest pewną stałą niezależną od kształtu ciała.

Zakładając, że krzywa oddająca kształt ciała (po obróceniu jej wzdłuż pionowej osi układu współrzędnych) może być wyznaczona przez pewną funkcję $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, możemy wyprowadzić:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+\dot{x}(t)^2}$$



Rysunek 1.1: Wyliczanie oporu

Całkowity opór stawiany przez ośrodek ma postać:

$$2\pi M \int_0^R \frac{tdt}{1+\dot{x}(t)^2}$$

Zatem problem można sprowadzić do zagadnienia:

$$J[x(\cdot)] = \int_0^R \frac{tdt}{1+\dot{x}(t)^2} \to \min;$$

$$x \in PC^1([0,R]); \quad \dot{x}(t) \geqslant 0;$$

$$x(0) = 0; \quad x(R) = H; \quad H, R > 0.$$

Rozpatrując to zagadnienie warto zastanowić się, czy niektóre przyjęte założenia nie są zbyt mocne i czy nie wpływają istotnie na kształt rozwiązań. Odpowiedź na to pytanie okazuje się być twierdząca. Na przestrzeni czasu przeprowadzono wiele badań dotyczących kształtu ciała o minimalnym oporze, uchylając różne kombinacje wspomnianych założeń. Okazuje się więc, że dobór klasy funkcji dopuszczalnych jako rozwiązania jest w tym przypadku niezwykle istotny. Rozpatrywanie klasy funkcji ciągłych nasuwa się samo, jako logiczna konsekwencja fizycznego pochodzenia omawianego zagadnienia. Okazuje się jednak, że to nie wystarczy. Założenie obecne w modelu, orzekające że cząsteczki tylko raz odbijają się od ciała (a więc zaraz po odbiciu kończą swą egzystencję) sprawia, że dla funkcji ciągłych nie istnieje optymalny kształt ciała. Założenie to jest jednak niezwykle trudno wyeliminować. W efekcie, klasa rozpatrywanych funkcji musi zostać zawężona.

Aby w ogóle można było obliczyć wartość oporu, który napotyka ciało, konieczne jest dodanie założenia o różniczkowalności prawie wszędzie badanych funkcji. Konieczność ta wynika ze sposobu liczenia całkowitego oporu, będącego funkcjonałem zależnym od pierwszej pochodnej krzywej obrazującej kształt ciała. Innym założeniem często dodawanym do omawianego zagadnienia jest nieujemność owej pochodnej. W pewnym sensie rekompensuje ono fakt, że cząsteczki mogą odbijać się od ciała tylko raz, jest więc logicznie uzasadnione.

W związku z tym rozważane będzie następujące zagadnienie:

$$J[x(\cdot)] = \int_0^R \frac{dt}{1+\dot{x}(t)^2} \to \min;$$

$$x \in \Xi; \quad \dot{x}(t) = u(t) \in \Omega$$

$$x(0) = 0; \quad x(R) = H; \quad H, R > 0. \tag{1.1}$$

Brane pod uwagę będą następujące sytuacje:

1. $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = PC^1([0,R])$
2. $\Omega = \overline{\mathbb{R}}_+$ oraz $\Xi = PC^1([0,R])$
3. $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = C^1([0,R])$

W pierwszym przypadku, do zidentyfikowania ewentualnego minimum zostaną użyte zarówno metody optymalnego sterowania jak i klasyczne metody rachunku wariacyjnego. W drugim, ze względu na ograniczenie nałożone na pochodną - jedynie metody optymalnego sterowania. W ostatnim zaś, ze względu na węższą klasę dopuszczalnych funkcji - jedynie metody klasycznego rachunku wariacyjnego. Ze względu na różne klasy dopuszczalnych funkcji oraz różne metody, będziemy mieli do czynienia z dwoma rodzajami ekstremów. W przypadku optymalnego sterowania będzie to *minimum mocne*, natomiast w przypadku klasycznego rachunku wariacyjnego będzie to *minimum słabe*. Definicje obu ekstremów znajdują się w kolejnym rozdziale. W ogólności, nie można utożsamiać ekstremów mocnych i słabych, jednak dla powyższego zagadnienia istnieje pomiędzy nimi pewien związek, który zostanie uwidoczniony w rozdziale piątym.

Rozdział 2

Preliminaria

Kilka pierwszych definicji oraz twierdzeń odnosi się do tradycyjnego rachunku wariacyjnego.

Definicja 1. *Niech $F(t,x,\dot{x}) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją trzech zmiennych. Zagadnienie*

$$J[x(\cdot)] = \int_a^b F(t, x(t), \dot{x}(t))dt \to min,$$

$$x(a) = x_a, x(b) = x_b, \tag{2.1}$$

gdzie dziedziną funkcjonału J jest zbiór funkcji $C^1([a,b])$ wyposażony w normę $||\cdot||_{C^1([a,b])}$, zdefiniowaną jako

$$||x(\cdot)||_{C^1([a,b])} = \sup_{t\in[a,b]} \max(|x(t)|, |\dot{x}(t)|),$$

*nazywamy **najprostszym zagadnieniem rachunku wariacyjnego**.*

Definicja 2. *Funkcję $x(\cdot)$ nazywamy **dopuszczalną** dla zagadnienia* (2.1)*, jeśli $x \in C^1([a,b])$ oraz $x(a) = x_a, x(b) = x_b$.*

Definicja 3. *Funkcję $\widehat{x} \in C^1([a,b])$ nazywamy **słabym minimum** zagadnienia* (2.1)*, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $J[x(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot)]$ dla wszystkich $x(\cdot)$ dopuszczalnych dla zagadnienia* (2.1)*, spełniajacych $||x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)||_{C^1([a,b])} \leqslant \varepsilon$.*

Twierdzenie 1 (Równania Eulera [1])**.** *Niech $\widehat{x}(\cdot)$ będzie funkcją dopuszczalną dla zagadnienia* (2.1) *oraz niech funkcje $F, F_x, F_{\dot{x}}$ będą ciągłe w otoczeniu krzywej $[a,b] \ni t \to (t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \in \mathbb{R}^3$. Jeżeli funkcja $\widehat{x}(\cdot)$ jest słabym minimum zagadnienia* (2.1)*, wówczas funkcja $\widehat{F}_{\dot{x}}(\cdot)$ jest różniczkowalna oraz spełnione jest równanie Eulera:*

$$\frac{\partial \widehat{F}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{F}}{\partial \dot{x}}. \tag{2.2}$$

W notacji zastosowanej w Twierdzeniu 1 użyto funkcji $\widehat{F}_{\dot{x}}(\cdot)$, zdefiniowanej w następujący sposób: $\widehat{F}_{\dot{x}}(t) = F_{\dot{x}}(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t))$. W pracy wielokrotnie jeszcze będzie używany analogiczny skrót myślowy. Funkcja "z daszkiem" jednej zmiennej powstaje z funkcji "bez daszka" wielu zmiennych, poprzez wstawienie potencjalnego kandydata na ekstremum, w miejsce odpowiednich parametrów.

Twierdzenie 2 (Warunki Weierstrassa-Erdmanna [2])**.** *Jeżeli zamiast zbioru $C^1([a,b])$ rozważymy jako dziedzinę zagadnienia* (2.1) *zbiór $PC^1([a,b])$, wówczas aby dana funkcja $\widehat{x}(\cdot)$*

stanowiła słabe minimum zagadnienia (2.1)*, we wszystkich swoich punktach różniczkowalności musi ona spełniać równanie Eulera* (2.2)*, a dla każdego punktu $t_i \in (a, b)$, w którym nie jest różniczkowalna, musi spełniać następujące warunki Weierstrassa-Erdmanna:*

$$\widehat{F}_{\dot{x}}|_{t=t_i-0} - \widehat{F}_{\dot{x}}|_{t=t_i+0} = 0,$$
$$(\widehat{F} - \dot{x}\widehat{F}_{\dot{x}})|_{t=t_i-0} - (\widehat{F} - \dot{x}\widehat{F}_{\dot{x}})|_{t=t_i+0} = 0.$$

Twierdzenie 3 (Warunek Legendre'a [2])**.** *Jeżeli funkcja $\widehat{x}(\cdot)$ jest słabym minimum zagadnienia* (2.1) *oraz funkcja $F_{\dot{x}\dot{x}}$ jest określona w otoczeniu krzywej $[a, b] \ni t \to (t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t)) \in \mathbb{R}^3$, wówczas spełniony jest następujący warunek Legendre'a:*

$$\frac{\partial^2 \widehat{F}}{\partial \dot{x}^2} \geqslant 0.$$

Kolejne definicje i twierdzenia wprowadzają pojęcia i fakty związane z metodami optymalnego sterowania.

Definicja 4. *Niech $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, $F(t, x, u) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ będzie funkcją ciągłą i $\varphi(t, x, u) : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Zagadnienie*

$$J[x(\cdot), u(\cdot)] = \int_a^b F(t, x(t), u(t))dt \to \min,$$
$$\dot{x} = \varphi(t, x, u), (\forall t\, u(t) \in \Omega), x(a) = x_a, x(b) = x_b, \tag{2.3}$$

gdzie dzieidną funkcjonału J jest przestrzeń $X = PC^1([a, b], \mathbb{R}^n) \times PC([a, b], \mathbb{R}^m)$ wyposażona w normę $|| \cdot ||_{\sup}$, zdefiniowaną jako

$$||(x(\cdot), u(\cdot))||_{\sup} = \sup_{t \in [a,b]} |x(t)|,$$

*nosi nazwę **problemu optymalnego sterowania**. Funkcję $x(\cdot)$ nazywamy **zmienną stanu**, a funkcję $u(\cdot)$ nazywamy **zmienną sterowania**.*

Klasa $PC^1(A, B)$ stanowi w powyższym rozumieniu zbiór funkcji ciągłych, różniczkowalnych za wyjątkiem skończonej liczby punktów, których dziedziną jest zbiór A, a obraz dziedziny zawiera się w B. Klasa $PC(A, B)$ jest to zbiór funkcji ciągłych za wyjątkiem skończonej liczby punktów, o nieciągłościach pierwszego rodzaju, których dziedziną jest zbiór A, a obraz dziedziny zawiera się w B. Jak się później okaże, precyzyjna identyfikacja klasy rozpatrywanych funkcji jest niezwykle istotna.

Definicja 5. *Uporządkowaną parę funkcji $(x(\cdot), u(\cdot)) \in X$, która spełnia ograniczenia zagadnienia* (2.3) *nazywamy parą **dopuszczalną** dla zagadnienia* (2.3)*.*

Definicja 6. *Dopuszczalna dla zagadnienia* (2.3) *parę $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ nazywamy **mocnym minimum** problemu optymalnego sterowania* (2.3)*, jeżeli istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że $J[x(\cdot), u(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot)]$ dla wszystkich dopuszczalnych par $(x(\cdot), u(\cdot))$, spełniających $||x(\cdot) - \widehat{x}(\cdot)||_{\sup} \leqslant \varepsilon$.*

Definicja 7. *Funkcjonał*

$$\mathcal{L}[(x(\cdot), u(\cdot)), \lambda] = \int_a^b L(t, x(t), \dot{x}(t), u(t))dt,$$

gdzie

$$L(t, x, \dot{x}, u) = \lambda F(t, x, u) + p(t) \cdot (\dot{x} - \varphi(t, x, u)),$$

*nosi nazwę **funkcji Lagrange'a** dla problemu* (2.3)*. Mnożnikiem Lagrange'a w tym przypadku jest uporządkowana para $(p(\cdot), \lambda)$, gdzie $p : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ oraz $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}_+$. Funkcja L nosi nazwę **lagranżjanu**.*

Twierdzenie 4 (Zasada maksimum Pontriagina [1]). *Rozpatrzmy dopuszczalną dla zagadnienia* (2.3) *parę* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *oraz funkcje* F, F_x, φ *i* φ_x, *ciągłe w otoczeniu krzywej* $[a, b] \ni t \mapsto (t, \widehat{x}(t), \widehat{u}(t)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \Omega$. *Jeżeli para* $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ *jest mocnym minimum lokalnym problemu* (2.3), *wówczas istnieje nieujemna liczba* λ *oraz odwzorowanie* $p(\cdot) \in PC^1([a, b], \mathbb{R}^n)$, *z których przynajmniej jedno jest różne od zera, takie, że równania Eulera:*

$$\frac{\partial \widehat{L}}{\partial x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial \widehat{L}}{\partial \dot{x}} \Leftrightarrow \dot{p}(t) = -p(t) \cdot \widehat{\varphi}_x(t) + \lambda \widehat{F}_x(t),$$

a także warunek minimum

$$\min_{u \in \Omega} L(t, \widehat{x}(t), \dot{\widehat{x}}(t), u) = \widehat{L}(t)$$

są spełnione dla każdego punktu ciągłości $u(\cdot)$.

Definicja 8. ***Ekstremalą Pontriagina*** *nazywamy odwzorowanie* $[a, b] \ni t \to (\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \lambda, p(t)) \in \mathbb{R}^n \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, *gdzie* $\widehat{x}, \widehat{u}, \lambda$ *oraz* p *spełniają warunki Twierdzenia 4.*

Twierdzenie 5 ([5]). *Jeżeli* $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \lambda, p(t))$ *jest ekstremalą Pontriagina, wówczas dla dowolnej stałej* $\mu > 0$, *ekstremalą Pontriagina jest również* $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \mu\lambda, \mu p(t))$.

Powyższy prosty fakt wynika bezpośrednio ze sposobu konstrukcji ekstremal Pontriagina. Aby go dowieść wystarczy podstawić $\mu\lambda$ oraz μp w miejsce λ oraz p w Twierdzeniu 4.

Definicja 9. *Ekstremalę Pontriagina* $(\widehat{x}(t), \widehat{u}(t), \lambda, p(t))$ *nazywamy* ***normalną***, *jeżeli* $\lambda \neq 0$. *W przeciwnym razie nazywamy ją* ***anomalną*** *(ang. "abnormal").*

Definicja 10. ***Hamiltonianem*** *nazywamy funkcję* $H : [a, b] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}$ *spełniającą*

$$H(t, x, u) = p(t) \cdot \varphi(t, x, u) - \lambda F(t, x, u).$$

Funkcję Hamiltona (Hamiltonian) możemy otrzymać poprzez zastosowanie do lagranżjanu przekształcenia Legendre'a [1].

Zasada maksimum Pontriagina może być zatem zapisana w postaci hamiltonowskiej. Wówczas dla nieujemnej stałej λ oraz odwzorowania $PC^1([a, b], \mathbb{R}^n) \ni p : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ (przy czym nie mogą być jednocześnie równe zero) zachodzi:

$$\begin{array}{rl} \dot{\widehat{x}} = \widehat{H}_p, & \text{(układ sterowania)} \\ \dot{\widehat{p}} = -\widehat{H}_x, & \text{(układ pomocniczy)} \\ \widehat{H}(t) = \max_{u \in \Omega} H(t, \widehat{x}, u) & \text{(warunek maksimum)} \\ \widehat{x}(a) = x_a, \widehat{x}(b) = x_b. & \end{array}$$

Układ sterowania i układ pomocniczy tworzą razem **układ Hamiltona**.

Rozdział 3

Przypadek nieograniczony

Na początku zajmiemy się zagadnieniem (1.1), dla którego $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = PC^1([0, R])$. Aby odnaleźć mocne minimum tego zagadnienia, zastosowana zostanie zasada maksimum Pontriagina (Twierdzenie 4). Dostosowana do rozpatrywanego problemu brzmi ona w następujący sposób:

Twierdzenie 6 ([3])**.** *Jeżeli para $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot))$ stanowi mocne minimum zagadnienia (1.1), gdzie $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = PC^1([0, R])$, wówczas istnieje niezerowa para $(\lambda, p(\cdot))$, gdzie $\lambda \geqslant 0$ oraz $p(\cdot) \in PC^1([0, R], \mathbb{R})$ taka, że dla prawie wszystkich $t \in [0, R]$ spełnione są następujące warunki:*

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{x}}(t) &= \widehat{H}_p(t), \\ \dot{p}(t) &= -\widehat{H}_x(t), \\ \widehat{H}(t) &= \max_{u \in \mathbb{R}} H(u, \lambda, p(t)), \end{aligned} \tag{3.1}$$

gdzie Hamiltonian H jest zdefiniowany jako

$$H(u, \lambda, p(t)) = p(t)u - \frac{\lambda}{1 + u^2}.$$

Twierdzenie 7 ([3])**.** *Wszystkie ekstremale Pontriagina $(\widehat{x}(\cdot), \widehat{u}(\cdot), \lambda, p(\cdot))$ spełniające warunki Twierdzenia 6 są ekstremalami normalnymi, dla których $\lambda > 0$ oraz $p(\cdot) \equiv -\mu < 0$.*

Dowód. Ponieważ hamiltonian H nie zależy od x, więc $-\widehat{H}_x = 0 = \dot{p}$, zatem $p(t) = -\mu$ dla pewnego rzeczywistego μ. Jeżeli $\mu = 0$, to $\lambda > 0$, co jest konsekwencją Twierdzenia 6. Wówczas równanie (3.1) przybiera postać

$$\frac{-\lambda}{1 + \widehat{u}(t)^2} = \max_{u \in \mathbb{R}} \frac{-\lambda}{1 + u^2},$$

a ponieważ $\lambda > 0$, maksimum nie może być osiagnięte ($u \to \pm\infty$). W związku z tym $\mu \neq 0$. Z drugiej strony, dla $\mu < 0$

$$\max_{u \in \mathbb{R}} \left(\frac{-\lambda}{1 + u^2} - \mu u \right)$$

również nie istnieje, w związku z czym $\mu > 0$.

Załózmy teraz, że $\lambda = 0$. Równanie (3.1) przybiera postać

$$-\mu\widehat{u}(t) = \max_{u \in \mathbb{R}} (-\mu u).$$

Także w tym przypadku maksimum nie istnieje. (Gdyby zamiast $\mathbb{R}$ rozpatrzeć jako Ω zbiór $\overline{\mathbb{R}}_+$, wówczas maksimum byłoby osiągnięte dla $u = 0$, co jest niemożliwe w konfrontacji z warunkami $y(0) = 0$, $y(R) = H$ i $H, R > 0$ oraz faktem, że $\widehat{u}(t)$ ma skończoną liczbe punktów nieciągłości.) Zatem $\lambda < 0$. □

Na podstawie Twierdzenia 7, zmienna sterowania $\widehat{u}(\cdot)$ musiałaby spełniać warunek

$$\widehat{H}(t) = \max_{u\in\mathbb{R}} \left(\frac{-\lambda}{1+u^2} - \mu u \right),$$

gdzie $\lambda, \mu > 0$. Jest to jednak niemożliwe ($u \to -\infty$). Nie istnieje zatem funkcja $\widehat{u}(\cdot)$, która spełniałaby warunki konieczne minimum. Zatem mocne minimum zagadnienia (1.1), dla $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = PC^1([0, R])$ nie istnieje.

W artykule [3] autorzy argumentują, że znaleźli *minimum lokalne* rozważanego zagadnienia. Nie precyzują oni jednak czy chodzi im o minimum słabe, czy mocne. Z zastosowanych przez nich metod (optymalne sterowanie) można wnioskować, że mają na myśli mocne minimum (które z definicji jest minimum lokalnym). Tymczasem mocne minimum, w świetle powyższych rozważań, nie istnieje. Prześledźmy (nieco przeredagowany) tok ich rozumowania.

Najpierw odpowiemy na pytanie, czy istnieje maksimum lokalne funkcji $H(u, \lambda, -\mu)$, ze względu na parametr u. Rozpatrzmy warunki pierwszego rzędu:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\lambda u}{(1+u^2)^2} = \mu. \Leftrightarrow \frac{u}{(1+u^2)^2} = C, \tag{3.2}$$

gdzie $C > 0$ jest pewną stałą. Zatem $\widehat{u} \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{d}{du}\frac{u}{(1+u^2)^2} = \frac{1-3u^2}{(1+u^2)^3}$$

Funkcja $\frac{u}{(1+u^2)^2}$ na przedziale $(0, (\sqrt{3})^{-1})$ jest rosnąca, a na przedziale $((\sqrt{3})^{-1}, +\infty)$ malejąca, przy czym $\lim_{u\to+\infty} \frac{u}{(1+u^2)^2} = 0$. Zatem równanie (3.2) albo nie ma żadnych rozwiązań, albo ma jeden pierwiastek $\widehat{u} = (\sqrt{3})^{-1}$, albo dwa pierwiastki $\widehat{u}_1 \in (0, (\sqrt{3})^{-1})$ oraz $\widehat{u}_2 \in ((\sqrt{3})^{-1}, +\infty)$, w zależności od wartości stałej C. Ponadto, dla dowolnej liczby $\widehat{u} \in \mathbb{R}_+$ istnieje $C > 0$ takie, że $\widehat{u}$ jest rozwiązaniem (3.2).

Analiza warunków dostatecznych dla maksimum pokazuje, że

1. dla $u \in (\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty)$ zachodzi $H_{uu} < 0$,
2. dla $u = \frac{\sqrt{3}}{3}$ zachodzi $H_{uu} = 0$ oraz $H_{uuu} \neq 0$,
3. dla $u \in (0, \frac{\sqrt{3}}{3})$ zachodzi $H_{uu} > 0$.

W przypadku pierwszym mamy do cznienia z lokalnym maksimum, w przypadku drugim nie jest to ani maksimum, ani minimum, w przypadku zaś ostatnim jest to lokalne minimum [3]. Zatem $\widehat{u} \in ((\sqrt{3})^{-1}, +\infty)$. $\widehat{x}$ jest więc funkcją liniową, łączącą punkty $(0, 0)$ i (R, H) oraz stanowiącą *minimum lokalne* rozpatrywanego zagadnienia dla $H/R > (\sqrt{3})^{-1}$.

Komentarz do tego toku rozumowania należy rozpocząć od zadania pytania, jakie właściwie zagadnienie rozwiązali autorzy artykułu i czym jest uzyskane przez nich rozwiązanie. Jeżeli odpowiednio zawęzimy zbiór Ω, minimum lokalne stanie się globalnym, a więc uzyskamy rozwiązanie pewnego zagadnienia optymalnego sterowania. Z drugiej strony, rozpatrywane zagadnienie przestanie wówczas być przypadkiem nieograniczonym. Więcej szczegółów na ten temat zostanie podanych w rozdziale następnym.

Inna możliwość jest taka, że autorzy mieli na myśli *słabe minimum* a nie *minimum lokalne.* Z powyższego toku rozumowania nie wynika to jednak w sposób oczywisty. Więcej szczegółów na ten temat znajduje się w rozdziale piątym.

Rozdział 4

Przypadek ograniczony

Obecnie rozpatrywać będziemy zagadnienie (1.1), dla którego $\Omega = \overline{\mathbb{R}}_+$ oraz $\Xi = PC^1([0, R])$.

Do rozwiązania tego zagadnienia posłużą nam zmodyfikowane wersje Twierdzenia 6 i Twierdzenia 7, z poprzedniego rozdziału (po modyfikacji będziemy je oznaczać odpowiednio Twierdzenie 6a i Twierdzenie 7a). Modyfikacja polega na wzięciu zbioru $\Omega = \overline{\mathbb{R}}_+$ w miejsce zbioru $\Omega = \mathbb{R}$. Prawdziwość Twierdzenia 6a jest oczywista, a dowód Twierdzenia 7 zawiera komentarze niezbędne do uwzględnienia wzmiankowanej modyfikacji.

Twierdzenie 8 ([3])**.** *Ekstremale Pontriagina dla zagadnienia* (1.1) *stanowią minimum globalne.*

Dowód. Chcemy pokazać, że dla $\widehat{x}$ będącego elementem ekstremali Pontriagina i każdego dowolnego x dopuszczalnego dla zagadnienia (1.1) zachodzi

$$J[x(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot)] \Leftrightarrow \int_0^R \frac{dt}{1+u(t)^2} \geqslant \int_0^R \frac{dt}{1+\widehat{u}(t)^2}$$

Z (3.1):

$$\frac{-\lambda}{1+\widehat{u}(t)^2} - \mu\widehat{u}(t) \geqslant \frac{-\lambda}{1+u(t)^2} - \mu u(t).$$

Zcałkujmy stronami:

$$\int_0^R \left(\frac{-\lambda}{1+\widehat{u}(t)^2} - \mu\widehat{u}(t)\right)dt \geqslant \int_0^R \left(\frac{-\lambda}{1+u(t)^2} - \mu u(t)\right)dt,$$

z czego po przekształceniach otrzymujemy

$$\int_0^R \frac{dt}{1+\widehat{u}(t)^2} \leqslant \int_0^R \frac{dt}{1+u(t)^2},$$

ponieważ wszystkie dopuszczalne dla zagadnienia (1.1) pary (x, u) spełniają

$$\int_0^R u(t)dt = \int_0^R \dot{x}(t)dt = x(R) - x(0) = H.$$

□

Dzięki temu twierdzeniu rozwiązany zostaje problem istnienia minimum rozpatrywanego zagadnienia. Jeżeli istnieje ekstremala Pontriagina, wówczas należące do niej zmienne stanu i sterowania stanowią minimum globalne.

Zajmiemy się teraz odszukaniem tych ekstremal. Warunek (3.1) (Twierdzenie 6a) w połączeniu z Twierdzeniem 5, dają równość:

$$\widehat{H}(t) = -\mu\widehat{u}(t) - \frac{1}{1+\widehat{u}(t)^2} = \max_{u\in\overline{\mathbb{R}}_+}\Big(-\mu u - \frac{1}{1+u^2}\Big)$$

Ponieważ $\lim_{u\to+\infty} -\mu u - \frac{1}{1+u^2} = -\infty$, a $H(0,1,-\mu) = -1$, należy sprawdzić czy istnieją lokalne maksima funkcji H wewnątrz obszaru $\overline{\mathbb{R}}_+$. Jeżeli istnieją, trzeba sprawdzić, czy są nie mniejsze niż -1, w przeciwnym wypadku wartość maksymalna wybijana jest wyłącznie na brzegu zbioru.

Z poprzedniego rozdziału wiadomo, że lokalne maksimum funkcji H (z ustalonymi pozostałymi parametrami) istnieje wyłącznie dla $u > (\sqrt{3})^{-1}$. Z warunków pierwszego rzędu można wyliczyć wartość μ, dla której ustalone u stanowi maksimum lokalne hamiltonianu:

$$\mu = \frac{2u}{(1+u^2)^2}.$$

Rozpatrzmy trzy przypadki:

1. $u \in ((\sqrt{3})^{-1}, 1)$. Wówczas

$$u^2 > u^4 \Rightarrow 1+3u^2 > 1+2u^2+u^4 \Rightarrow \frac{1+3u^2}{(1+u^2)^2} > 1 \Rightarrow -\frac{2u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2} < -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu u - \frac{1}{1+u^2} < -1,$$

2. dla $u = 1$ zachodzi $H(1,-\mu,1) = -1$,

3. $u \in (1,+\infty)$. Wówczas

$$u^2 < u^4 \Rightarrow 1+3u^2 < 1+2u^2+u^4 \Rightarrow \frac{1+3u^2}{(1+u^2)^2} < 1 \Rightarrow -\frac{2u^2}{(1+u^2)^2} - \frac{1+u^2}{(1+u^2)^2} > -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\mu u - \frac{1}{1+u^2} > -1,$$

Zatem istnieją wymagane stałe λ i μ takie, że albo $u > 1$ maksymalizuje Hamiltonian, albo zarówno $u = 0$ jaki i $u = 1$ stanowią jego maksimum globalne. W połączeniu z warunkami początkowymi ($\widehat{x}(0) = 0, \widehat{x}(R) = H$) otrzymujemy następujące rozwiązanie: jeżeli $H/R \geqslant 1$, wówczas $\widehat{u} = H/R$ oraz $\widehat{x} = tH/R$; jeżeli $H/R < 1$, wówczas $\widehat{u}$ jest funkcją równą tożsamościowo zeru za wyjątkiem skończonej liczby przedziałów, na których jest równa jeden i których jednowymiarowa miara Lebesgue'a sumuje się do H. Wynika stąd, że dla $H/R \geqslant 1$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie rozpatrywanego problemu, zaś dla $H/R < 1$ rozwiązań jest nieskończenie wiele.

Interesujące jest porównanie pierwszego punktu z powyższej listy z rezultatami uzyskanymi w poprzednim rozdziale. Widać bowiem, że znalezione przez autorów [4] *minimum lokalne*, staje się minimum globalnym, po ograniczeniu Ω z $\mathbb{R}$ do $\overline{\mathbb{R}}_+$, o ile $H/R \geqslant 1$. Tymczasem, jeśli $H/R \in ((\sqrt{3})^{-1}, 1)$, w maksimum lokalnym Hamiltonian osiąga mniejszą wartość niż w zerze, stąd, jeśli Ω zawiera zero, wówczas rozwiązanie nie istnieje. Co więcej osiąga on wówczas w owym maksimum lokalnym wartość mniejszą, niż dla dowolnego $u < 0$. Zatem, aby $\widehat{u} = H/R$ było rozwiązaniem zagadnienia (1.1) dla $H/R < 1$, zbiór Ω musi być podzbiorem właściwym

$\overline{\mathbb{R}}_+$ (jest to warunek konieczny, lecz niewystarczający). Tak więc ograniczenia są tu jeszcze większe niż w rozważanym powyżej "przypadku ograniczonym".

Warto również podkreślić, jak ważne jest precyzyjne określenie klasy rozpatrywanych funkcji. Oznaczmy jako $c(t) : [0,1] \to [0,1]$ funkcję Cantora. Rozważmy funkcja

$$v(t) = [t - c(t)]\mathbf{1}_{[0,1]}(t) + (t-1)\mathbf{1}_{(1,2]}(t).$$

Funkcja ta ma następujące własności:

1. Jest ciągła.
2. $v(0) = 0, v(2) = 1$.
3. Jest prawie wszędzie (przedziałami) różniczkowalna.
4. $\dot{v}(t) = 1$, prawie wszędzie.
5. $J[v(\cdot)] = 1$.

Tymczasem z powyższych rozważań wynika, że wartość funkcjonału $J[\widehat{x}(\cdot)]$ dla zagadnienia (1.1), dla którego $\Omega = \overline{\mathbb{R}}_+$ oraz $\Xi = PC^1([0,R])$ wynosi co najmniej $1,5$. Niezgodność ta wynika m.in. z faktu, że w zetknięciu z funkcją $v(\cdot)$ Twierdzenie 8 przestaje mieć sens - ostatnia równość ($\int_0^R u(t)dt = H$) jest nieprawdziwa. W przypadku funkcji $v(\cdot)$, problemem jest to, że nie posiada ona Własności N Luzina. Własność ta gwarantuje, że "wkład" punktów nieciągłości pochodnej w przyrost funkcji wynosi 0. Funkcje dopuszczalne dla analizowanych przez nas zagadnień mają tylko skończoną liczbę punktów, w których nie są różniczkowalne, więc posiadają tę pożądaną własność. Jeżeli dodamy do tego założenie, że pochodna jest prawie wszędzie nieujemna (z czego wynika, że funkcja ma ograniczoną wariację), łatwo wywnioskować, że brane pod uwagę funkcje muszą być absolutnie ciągłe [5]. Gdyby funkcje dopuszczalne mogły nie mieć Własności N Luzina, wówczas wiele przytoczonych w poprzednich rozdziałach argumentów straciłoby sens.

Rozdział 5

Rozwiązanie metodami klasycznymi

W tym rozdziale przedmiotem poszukiwań będą słabe minima. Do ich odszukania zostaną zastosowane narzędzia tradycyjnego rachunku wariacyjnego. Na początku rozpatrywać będziemy zagadnienie (1.1), gdzie $\Omega = \mathbb{R}$ oraz $\Xi = C^1([0, R])$. Zaczniemy od udowodnienia pewnego pomocniczego twierdzenia.

Twierdzenie 9 (★). *Niech dana będzie funkcja*

$$f(\delta) = \frac{a_0 + a_1\delta + a_2\delta^2 + \ldots + a_n\delta^n}{b_0 + b_1\delta + b_2\delta^2 + \ldots + b_n\delta^n}$$

o rzeczywistych współczynnikach $a_0, a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$*, gdzie* $a_0, b_0 > 0$*. Jeżeli*

$$\frac{a_i}{a_0} = \frac{b_i}{b_0} \quad \textit{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k; k < n \quad \textit{oraz} \quad \frac{a_{k+1}}{a_0} < \frac{b_{k+1}}{b_0},$$

wówczas funkcja ta jest malejąca na pewnym przedziale $[0, \varepsilon)$*, gdzie* $\varepsilon > 0$*.*

Dowód.

$$\frac{a_{k+1}}{a_0} < \frac{b_{k+1}}{b_0} \quad \textit{oraz} \quad \frac{a_i}{a_0} = \frac{b_i}{b_0} \quad \textit{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, k; k < n \Rightarrow$$

$$1 + \frac{a_1}{a_0}\delta + \frac{a_2}{a_0}\delta^2 + \ldots + \frac{a_k}{a_0}\delta^k + \frac{a_{k+1}}{a_0}\delta^{k+1} < 1 + \frac{b_1}{b_0}\delta + \frac{b_2}{b_0}\delta^2 + \ldots + \frac{b_k}{b_0}\delta^k + \frac{b_{k+1}}{b_0}\delta^{k+1},$$

gdzie $\delta > 0$. Wobec tego

$$\frac{b_0 + b_1\delta + \ldots + b_{k+1}\delta^{k+1}}{b_0} > \frac{a_0 + a_1\delta + \ldots + a_{k+1}\delta^{k+1}}{a_0} \Rightarrow$$

$$\frac{a_0}{b_0} > \frac{a_0 + a_1\delta + \ldots + a_{k+1}\delta^{k+1}}{b_0 + b_1\delta + \ldots + b_{k+1}\delta^{k+1}}.$$

Ponieważ δ można dobrać dowolnie małe, wyrazy rzędu wyższego niż $k+1$ również mogą być dowolnie małe, w porównaniu z wyrazami niższych rzędów. Można zatem napisać

$$f(0) = \frac{a_0}{b_0} > \frac{a_0 + a_1\delta + \ldots + a_n\delta^n}{b_0 + b_1\delta + \ldots + b_n\delta^n} = f(\delta),$$

dla odpowiednio małych $\delta > 0$. Funkcja f, jako wymierna, jest zatem malejąca na pewnym niepustym przedziale zawierającym zero oraz pewne liczby dodatnie. □

Twierdzenie 10 (★). *$\widehat{x}(t) = tH/R$ jest słabym minimum zagadnienia (1.1), gdzie $\Omega = \mathbb{R}$ i $\Xi = C^1([0,R])$, dla $H/R > (\sqrt{3})^{-1}$. Dla $H/R \leqslant (\sqrt{3})^{-1}$ słabe minimum tego zagadnienia nie istnieje.*

Dowód. Ponieważ funkcja podcałkowa funkcjonału J nie zależy od x, warunki konieczne istnienia ekstremum słabego (Równania Eulera, Twierdzenie 1) przyjmują postać:

$$\frac{d}{dt}\frac{2\widehat{u}}{(1+\widehat{u}^2)^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{2\widehat{u}}{(1+\widehat{u}^2)^2} = C,$$

gdzie $C \in \mathbb{R}$. Ponadto $\widehat{u} \in C([0,R])$, zatem minimum (o ile istnieje) musi być postaci $\widehat{x}(t) = tH/R$.

Załóżmy, że $\dot{\widehat{x}} = \widehat{u} = H/R < (\sqrt{3})^{-1}$. Wówczas

$$F_{uu} = 2\frac{3\widehat{u}^2 - 1}{(1+\widehat{u}^2)^2} < 0.$$

Zgodnie z Twierdzeniem 3, nie są spełnione warunki konieczne istnienia ekstremum słabego, zatem dla $H/R < (\sqrt{3})^{-1}$ ono nie istnieje.

Rozważmy z kolei przypadek $H/R = (\sqrt{3})^{-1}$. Zgodnie z definicją ekstremum słabego, istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że dla każdej funkcji $\tilde{x}$ spełniającej $||\widehat{x} - \tilde{x}||_{C^1([0,R])} \leqslant \varepsilon$ zachodzi $J[\widehat{x}(\cdot)] \leqslant J[\tilde{x}(\cdot)]$. Pokażemy, że nie jest to prawdą.

Dla pewnego małego $\delta > 0$ rozpatrzmy funkcję $\bar{x} \in PC^1([0,R])$ taką, że $\dot{\bar{x}}(t) = \bar{u}(t) = (H/R - \delta H)\mathbf{1}_{(0,R-H)}(t) + (H/R + \delta(R-H))\mathbf{1}_{(R-H,R)}(t)$ oraz funkcję $\tilde{x}(t) \in C^1([0,R])$ równą $\bar{x}(t)$ dla $t \in [0, R-H-\xi] \cup [R-H+\xi, R]$, a na przedziale $(R-H-\xi, R-H+\xi)$, stanowiącą dobre jej przybliżenie klasy C^1 ($\xi > 0$).

Ustalmy $\varepsilon > 0$. Dla odpowiednio małych δ istnieją funkcje $\bar{x}$ i $\tilde{x}$ takie, że $||\widehat{x} - \tilde{x}||_{C^1([0,R])} \leqslant \varepsilon$. Ponadto $J[\bar{x}(\cdot)] = J[\tilde{x}(\cdot)] + \sigma$, gdzie $\mathbb{R} \ni \sigma \to 0$, gdy $\xi \to 0$. Sprawdzimy teraz, jak zachowuje się wartość funkcjonału $J[\bar{x}(\cdot)]$ w zależności od δ.

$$\begin{aligned} J[\bar{x}(\cdot)] = \int_0^R \frac{dt}{1+\bar{u}^2} &= \int_0^{R-H} \frac{dt}{1+(H/R-\delta H)^2} + \int_0^H \frac{dt}{1+(H/R+\delta(R-H))^2} \\ &= \frac{R-H}{1+(H/R-\delta H)^2} + \frac{H}{1+(H/R+\delta(R-H))^2} \\ &= \frac{(R-H)[1+(H/R+\delta(R-H))^2] + H[1+(H/R-\delta H)^2]}{[1+(H/R-\delta H)^2][1+(H/R+\delta(R-H))^2]} = \frac{L}{M}. \end{aligned}$$

Bez straty ogólności możemy założyć, że $H = 1$ oraz $R = \sqrt{3}$. Wówczas

$$L = \sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} + 2\delta\sqrt{3} - 4\delta + 6\sqrt{3}\delta^2 - 9\delta^2$$

oraz

$$M = \left(\frac{4}{3} - 2\delta\frac{1}{\sqrt{3}} + \delta^2\right)\left(\frac{4}{3} + 2\delta\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \delta^2(4 - 2\sqrt{3})\right).$$

Porównajmy współczynniki przy δ w liczniku i mianowniku:

$$\frac{a_1}{a_0} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{3}{2} - \sqrt{3} = \frac{\frac{4}{3}\cdot 2(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) - \frac{4}{3}\cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}}{16/9} = \frac{b_1}{b_0}.$$

Porównajmy współczynniki przy δ^2 w liczniku i mianowniku:

$$\frac{a_2}{a_0} = \frac{6\sqrt{3}-9}{\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{18-9\sqrt{3}}{4} = \frac{\frac{4}{3}+\frac{4}{3}(4-2\sqrt{3})-\frac{4}{\sqrt{3}}(1-\frac{1}{\sqrt{3}})}{16/9} = \frac{b_2}{b_0}.$$

Porównajmy współczynniki przy δ^3 w liczniku i mianowniku:

$$\frac{a_3}{a_0} = 0 < \frac{9}{8}\Big(3-\frac{5}{\sqrt{3}}\Big) = \frac{2(1-\frac{1}{\sqrt{3}})-\frac{2}{\sqrt{3}}(4-2\sqrt{3})}{16/9} = \frac{b_3}{b_0}.$$

Zatem, na mocy Twierdzenia 9, $J[\bar{x}(\cdot)] < J[\widehat{x}(\cdot)]$ dla odpowiednio małych δ. Ponieważ σ można wziąć dowolnie małe, zachodzi również $J[\tilde{x}(\cdot)] < J[\widehat{x}(\cdot)]$. Wobec tego dla $H/R = (\sqrt{3})^{-1}$ nie istnieje słabe minimum.

Załóżmy na koniec, że $H/R > (\sqrt{3})^{-1}$. Z rozważań zawartych w poprzednich rozdziałach wiadomo, że istnieje zagadnienie (1.1), dla którego $\Omega = [H/R-\delta, H/R+\delta]$ takie, że funkcja $\widehat{x}(t) = tH/R$ stanowi jego mocne minimum.

Rozważmy wobec tego $\mathcal{K}$ - zbiór wszystkich funkcji $x \in PC^1([0,R])$ takich, że $x(0) = 0, x(R) = H, \dot{x}(t) \in [H/R-\delta, H/R+\delta]$ dla t, w których $\dot{x}(t)$ jest określona, $||x-\widehat{x}||_{\sup} \leqslant \varepsilon$ oraz $\dot{x}(\cdot)$ ma skończoną liczbę punktów, w których nie jest określona. ε dobierzmy tak, żeby zgodnie z definicją mocnej zbieżności $\forall x \in \mathcal{K}\ J[x(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot)]$.

Oznaczmy $\xi = \min(\varepsilon, \delta)$ i zdefiniujmy $\mathcal{M}$ - zbiór wszystkich funkcji $x \in C^1([0,R])$ takich, że $x(0) = 0, x(R) = H, ||x-\widehat{x}||_{C^1([0,R])} \leqslant \xi$. Wówczas $\widehat{x} \in \mathcal{M} \subset \mathcal{K}$. Z tego prosty wniosek, że $\forall x \in \mathcal{K}\ J[x(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot)] \Rightarrow \forall x \in \mathcal{M}\ J[x(\cdot)] \geqslant J[\widehat{x}(\cdot)]$, a więc $\widehat{x}$ jest słabym minimum rozpatrywanego zagadnienia.

$\square$

W ostatniej części dowodu ujawnia się wzmiankowana wcześniej relacja pomiędzy minimum słabym a minimum mocnym. Wynika ono jednak ze specyfiki rozpatrywanego problemu - w ogólności (co pokazały wcześniejsze rozważania) istnieją minima słabe, nie będące minimami mocnymi oraz istnieją minima mocne, które nie stanowią minimów słabych, mimo iż są funkcjami klasy C^1.

Na koniec spróbujemy udzielić odpowiedzi na pytanie, czy istnieją minima słabe klasy PC^1. Zgodnie z Twierdzeniem 2, na każdym przedziale różniczkowalności, rozwiązanie takie musi spełniać równania Eulera, jest więc funkcją kawałkami liniową. Rozpatrzmy dwa sąsiadujące kawałki. Oznaczmy je przez $x_1(\cdot)$ i $x_2(\cdot)$ ($u_1 = \dot{x}_1(t), u_2 = \dot{x}_2(t)$). Zgodnie z warunkami Weierstrassa-Erdmanna musi zachodzić

$$\frac{u_1}{(1+u_1^2)^2} = \frac{u_2}{(1+u_2^2)^2} \tag{5.1}$$

$$\frac{1-u_1^2}{(1+u_1^2)^2} = \frac{1-u_2^2}{(1+u_2^2)^2} \tag{5.2}$$

Podstawiając równanie (5.1) do równania (5.2) otrzymujemy

$$\frac{1-u_1^2}{(1+u_1^2)^2} = \frac{1-u_2^2}{(1+u_1^2)^2}\frac{u_1}{u_2} \Rightarrow \frac{1}{u_1} - u_1 = \frac{1}{u_2} - u_2. \tag{5.3}$$

Funkcja $\frac{u}{(1+u^2)^2}$ jest ujemna dla $u < 0$ i dodatnia dla $u > 0$ zatem zgodnie z (5.1) wartości u_1 i u_2 muszą być tego samego znaku. Tymczasem funkcja $\frac{1}{u} - u$ ma pochodną ściśle ujemną i jest nieokreślona w zerze. Jeżeli więc $u_1 \neq u_2$, to wartości u_1 i u_2 musza być na podstawie

(5.3) różnych znaków. Otrzymaliśmy sprzeczność, zatem $u_1 = u_2$. Ponieważ $\widehat{u}$ jest stałe na dowolnych dwóch sąsiednich przedziałach, na których pochodna istnieje, punkty nieciągłości pochodnej faktycznie nie istnieją. Wobec tego jedyne rozwiązania klasy PC^1 są również klasy C^1, czym już się zajmowaliśmy.

Rozdział 6

Podsumowanie

Liczbę rozwiązań zagadnienia (1.1) zależnie od H/R oraz rodzaju szukanego minimum prezentuje poniższa tabelka:

H/R	**minimum mocne** ($u \geqslant 0$)	**minimum słabe** ($u \in \mathbb{R}$)
$\in (0, \frac{1}{\sqrt{3}}]$	$+\infty$	0
$\in (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)$	$+\infty$	1
$\in [1, +\infty)$	1	1

Postać tych rozwiązań to:

1. $\widehat{x}(t) = tH/R$: dla minimów słabych oraz minimum mocnego, przypadek $H/R \in [1, +\infty)$,

2. dowolna funkcja, której pochodna przyjmuje wartość 0 poza skończoną liczbą przedziałów o sumarycznej długości 1, na których jest równa 1: dla minimum mocnego, przypadek $H/R \in (0, 1)$.

Dla $u \in \mathbb{R}$ minimum mocne nie istnieje.

Bibliografia

[1] J. Brinkhuis, V. Tikhomirov, *Optimization: Insights and Applications*, Princeton University Press, Princeton, 2005.

[2] I. M. Gelfand, S. W. Fomin, *Rachunek Wariacyjny*, Państwowe Wydawnictwa Naukowe, Warszawa, 1972.

[3] Cristina J. Silva, Delfim F. M. Torres, *Two-dimensional Newton's Problem of Minimal Resistance*, Cardernos de Matematica - Serie de Investigacao CM 06/I-1, 2006

[4] Delfim F. M. Torres, A. Yu. Plakhov, *Optimal Control of Newton-Type problems of Minimal Resistance*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino - Vol. 64, 1, 2006

[5] http://en.wikipedia.org/wiki/Absolute_continuity